



Universität Stuttgart

**Institut für Mechanik**

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

Prof. Dr.-Ing. H. Steeb

[www.mechbau.uni-stuttgart.de](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de)

## Ergänzung zur Vorlesung

### Technische Mechanik II

Tensorrechnung  
Eine Einführung

**SS 2016**

(letzte Änderung: 15. April 2016)

## **Impressum**

Das Vorlesungsmanuskript wurde von Herrn Prof. Dr.-Ing W. Ehlers für die verschiedenen Vorlesungsveranstaltungen in den Bachelor- und Master-Studiengängen an der Universität Stuttgart erarbeitet.

Das vorliegende Manuskript ist eine ausschließlich in der Notation überarbeitete Version für die Vorlesung Technische Mechanik II im Sommersemester 2016.

Stuttgart, April 2016

Prof. Dr.-Ing. Holger Steeb

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundzüge der Tensorrechnung</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung des Tensorbegriffs . . . . .	1
1.2	Elementare Rechenregeln der Tensoralgebra . . . . .	2
1.3	Spezielle Tensoren und Operationen . . . . .	5
1.4	Wechsel der Basis . . . . .	8
1.5	Tensoren höherer Stufe . . . . .	18
1.6	Fundamentaltensor 3. Stufe (RICCI-Tensor) . . . . .	21
1.7	Der axiale Vektor . . . . .	22
1.8	Das äußere Tensorprodukt von Tensoren . . . . .	26
1.9	Das Eigenwertproblem und die Invarianten eines Tensors . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis</b>	<b>29</b>
2.1	Einführung des Funktionsbegriffs . . . . .	29
2.2	Funktionen skalarer Variablen . . . . .	29
2.3	Funktionen vektorieller und tensorieller Variablen . . . . .	30
2.4	Integralsätze . . . . .	34
2.5	Transformationsbeziehungen zwischen aktueller und Referenzkonfiguration	39





**Basisdarstellung eines beliebigen Tensors:**

$$\mathbf{T} = T_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)$$

$$\text{mit } T_{ik} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} : \begin{cases} \text{Koeffizientenmatrix von } \mathbf{T} \text{ mit} \\ 9 \text{ unabhängigen Einträgen} \end{cases}$$

## 1.2 Elementare Rechenregeln der Tensoralgebra

**Vor.:** Es existiert  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots\} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ .

### (a) TENSORADDITION

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} && : \text{kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} && : \mathbf{0} \quad : \text{identisches Element} \\ \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) &= \mathbf{0} && : -\mathbf{A} \quad : \text{inverses Element} \end{aligned}$$

**Tensoraddition bzgl. der orthonormierten Tensorbasis:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{B} = B_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \\ \longrightarrow \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = \underbrace{(A_{ik} + B_{ik})}_{C_{ik}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \end{aligned}$$

**Bem.:** Die Ausführung der Tensoraddition als Addition der Tensorkoeffizienten setzt für beide Tensoren dieselbe Tensorbasis voraus.

### (b) MULTIPLIKATION EINES TENSORS MIT EINEM SKALAR

$$\begin{aligned} 1 \mathbf{A} &= \mathbf{A} && : 1 \quad : \text{identisches Element} \\ \alpha (\beta \mathbf{A}) &= (\alpha \beta) \mathbf{A} && : \text{assoziatives Gesetz} \\ (\alpha + \beta) \mathbf{A} &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A} && : \text{distributives Gesetz (bzgl. skalarer Addition)} \\ \alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} && : \text{distributives Gesetz (bzgl. Tensoraddition)} \\ \alpha \mathbf{A} &= \mathbf{A} \alpha && : \text{kommutatives Gesetz} \end{aligned}$$

### (c) LINEARE ABBILDUNG ZWISCHEN TENSOR UND VEKTOR

Es gilt die Definition der linearen Abbildung (vgl. 1.1)

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$$

**Bem.:** Die Multiplikation eines Tensors mit einem Vektor wird in der Literatur gelegentlich auch als „verjüngendes Produkt“ eingeführt. Der Punkt (Operator) gibt hier den Grad der Verjüngung an.

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} && : \text{distributives Gesetz} \\ \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{u}) &= \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} && : \text{distributives Gesetz} \\ (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u} &= \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{0} && : \mathbf{0} : \text{Nullelement der linearen Abbildung} \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} && : \mathbf{I} : \text{identisches Element der linearen Abbildung} \end{aligned}$$

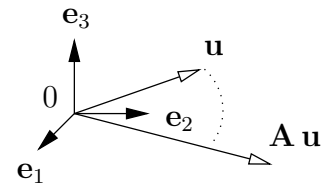
**Lineare Abbildung in Basisdarstellung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} &= (A_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (u_j \mathbf{e}_j) = A_{ik} u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Man erhält

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = A_{ik} u_j \delta_{kj} \mathbf{e}_i = \underbrace{A_{ik} u_k}_{w_i} \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} i : \text{freier Index} \\ k : \text{stummer Index} \end{cases}$$

**Bem.:** Eine lineare Abbildung  $\mathbf{A}$  bewirkt in der Regel eine Drehung **und** eine Streckung des Vektors  $\mathbf{u}$ .



**Identitätstensor  $\mathbf{I} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ :**

$$\mathbf{I} = \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Kontrolle der definierten Eigenschaft:

$$\mathbf{u} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) u_j \mathbf{e}_j = u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = u_j \delta_{ij} \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i \quad \text{q. e. d.}$$

**Bem.:** Tensoren, die nur Basisvektoren enthalten, heißen Fundamentaltensoren, d. h.

$$\mathbf{I} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \text{ ist Fundamentaltensor 2. Stufe.}$$

(d) SKALARPRODUKT VON TENSOREN (inneres Produkt)

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= \mathbf{B} : \mathbf{A} && : \text{kommutatives Gesetz} \\ \mathbf{A} : (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C} && : \text{distributives Gesetz} \\ (\alpha \mathbf{A}) : \mathbf{B} &= \mathbf{A} : (\alpha \mathbf{B}) = \alpha (\mathbf{A} : \mathbf{B}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} &= 0 \quad \forall \mathbf{A}, \text{ wenn } \mathbf{B} \equiv \mathbf{0} \\ &\longrightarrow \mathbf{A} : \mathbf{A} > 0 \text{ für } \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Skalarprodukt von  $\mathbf{A}$  mit einem einfachen Tensor  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ :

$$\mathbf{A} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})$$

**Skalarprodukt in Basisdarstellung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k), \quad \mathbf{B} = B_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \\ \alpha &= \mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) : B_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = A_{ik} B_{st} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) : (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \end{aligned}$$

Man erhält

$$\alpha = A_{ik} B_{st} \delta_{is} \delta_{kt} = A_{ik} B_{ik}$$

**Bem.:** Das Ergebnis des Skalarprodukts ist ein Skalar.

### (e) TENSORPRODUKT VON TENSOREN

**Definition:** Das Tensorprodukt von Tensoren genügt der Beziehung

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$$

**Bem.:** Mit dieser Definition ist das Tensorprodukt von Tensoren unmittelbar an die lineare Abbildung geknüpft (vgl. 1.1 (a)).

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} && : \text{distributives Gesetz} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} && : \text{distributives Gesetz} \\ \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) && : \text{assoziatives Gesetz} \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{T} && : \mathbf{I} : \text{identisches Element} \\ \mathbf{0} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} && : \mathbf{0} : \text{Nullelement} \end{aligned}$$

**Bem.:** Das kommutative Gesetz gilt im allgemeinen nicht, d. h.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ .



**Tensorprodukt für einfache Tensoren:**

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$$

Es gilt mit oben genannter Definition:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \\ \rightarrow [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})] \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{v}] \\ &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} \\ &= [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})] \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

**Konsequenz:**

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$$

**Tensorprodukt in Basisdarstellung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) B_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= A_{ik} B_{st} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= A_{ik} B_{st} \delta_{ks} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= A_{ik} B_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \end{aligned}$$

**Bem.:** Das Ergebnis des Tensorprodukts ist ein Tensor.

### 1.3 Spezielle Tensoren und Operationen

#### (a) TRANSPONIERTER TENSOR

**Definition:** Der zu  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  gehörende transponierte Tensor  $\mathbf{A}^T$  genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \\ (\alpha \mathbf{A})^T &= \alpha \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

**Transposition eines einfachen Tensors  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ :**

Mit oben genannter Definition gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{w} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \\ \longrightarrow (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \end{aligned}$$

**Transponierter Tensor in Basisdarstellung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \\ \longrightarrow \mathbf{A}^T &= A_{ik} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) \\ &= A_{ki} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \quad : \text{Umbenennung der Indizes} \end{aligned}$$

**Merke:** Transposition eines beliebigen Tensors  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  kann durch Transposition der Tensorbasen **oder** der Tensorkoeffizienten erfolgen.

## (b) SYMMETRISCHER UND SCHIEFSYMMETRISCHER TENSOR

**Definition:** Ein Tensor  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  ist symmetrisch, wenn

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

und schief-symmetrisch (antimetrisch), wenn

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$$

**Symmetrischer und schief-symmetrischer Anteil eines beliebigen Tensors  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$ :**

$$\text{sym } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$$

$$\text{skw } \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} = \text{sym } \mathbf{A} + \text{skw } \mathbf{A}$$

Eigenschaften symmetrischer und schief-symmetrischer Tensoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot [(\text{sym } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}] &= [(\text{sym } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{w}] \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \cdot [(\text{skw } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v}] &= -[(\text{skw } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{w}] \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

**Positive Definitheit symmetrischer Tensoren:**

- $\text{sym } \mathbf{A}$  ist positiv definit, wenn  $\text{sym } \mathbf{A} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\text{sym } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} > 0$
- $\text{sym } \mathbf{A}$  ist positiv semidefinit, wenn  $\text{sym } \mathbf{A} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\text{sym } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} \geq 0$

(c) INVERSER TENSOR

**Definition:** Der zu  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  gehörende inverse Tensor  $\mathbf{A}^{-1}$  genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

**Vor.:**  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \\ (\mathbf{A}^{-1})^T &= (\mathbf{A}^T)^{-1} =: \mathbf{A}^{T-1} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

**Bem.:** Die Berechnung des inversen Tensors in Basisdarstellung erfolgt im Zusammenhang mit der Einführung des „doppelten Kreuzprodukts“ (äußeres Tensorprodukt von Tensoren).

(d) ORTHOGONALER TENSOR

**Definition:** Ein orthogonaler Tensor  $\mathbf{Q} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  genügt der Eigenschaft

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Darüber hinaus gilt  $\begin{cases} \det \mathbf{Q} = \pm 1 & : \text{orthogonaler Tensor} \\ \det \mathbf{Q} = 1 & : \text{eigentlich orthogonaler Tensor} \end{cases}$

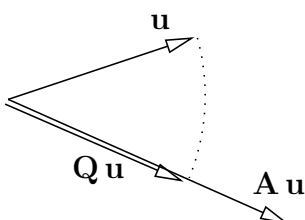
**Bem.:** Die Berechnung der Determinante eines Tensors zweiter Stufe erfolgt mit Hilfe des äußeren Tensorprodukts (vgl. 1.8).

Eigenschaft des orthogonalen Tensors:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}] &= [\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}] \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \longrightarrow [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}] \cdot [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}] &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

**Bem.:** Eine lineare Abbildung mit  $\mathbf{Q}$  erhält die Norm eines Vektors (vgl. TM I, 1.2 B)

**Veranschaulichung:**



**im allgemeinen:** lineare Abbildung mit  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  bewirkt Drehung **und** Streckung

**speziell:** lineare Abbildung mit  $\mathbf{Q}$  bewirkt **nur** eine Drehung

(e) SPUR EINES TENSORS

**Definition:** Die Spur  $\text{tr } \mathbf{A}$  eines Tensors  $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  ist das spezielle Skalarprodukt

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I} = \alpha$$

Es gelten die Beziehungen

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\text{tr } \mathbf{A}^T = \text{tr } \mathbf{A}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{I} = \mathbf{B} : \mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T : \mathbf{A}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

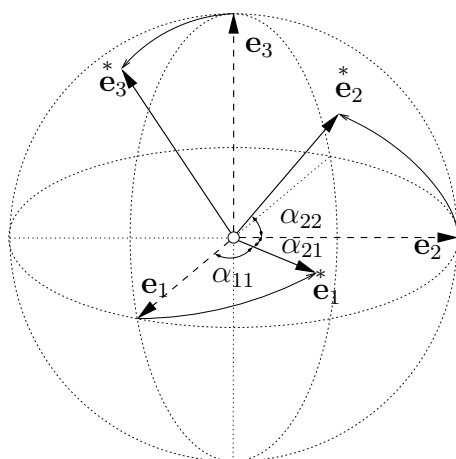
**1.4 Wechsel der Basis**

**Bem.:** Ziel ist die Herstellung eines Zusammenhangs für die Darstellung vektorieller und tensorieller Größen bzgl. unterschiedlicher Basissysteme.

**hier:** Beschränkung auf gegeneinander gedrehte, orthonormierte Basissysteme.

(A) DREHUNG DES BEZUGSSYSTEMS

**Veranschaulichung:**



$\{0, \mathbf{e}_i\}$  : Bezugssystem

$\{0, \mathbf{e}_i^*\}$  : gedrehtes Bezugssystem

$\{\alpha_{ik}\}$  : Winkel zwischen den Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_k^*$

**Entwicklung des Transformationstensors:**

Es gilt

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

so dass

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j$$

man benutzt  $\mathbf{e}_i^* = \delta_{ik} \mathbf{e}_k^*$ , so dass

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \delta_{ik} \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j$$

man erhält

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i =: \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

**Bem.:**  $\mathbf{R}$  ist der Transformationstensor, der die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  in die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i^*$  abbildet.

**Koeffizientenmatrix  $R_{jk}$ :**

$$R_{jk} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k^* = |\mathbf{e}_j| |\mathbf{e}_k^*| \cos \sphericalangle (\mathbf{e}_j; \mathbf{e}_k^*) = \cos \alpha_{jk} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{e}_j| = |\mathbf{e}_k^*| = 1$$

**Bem.:**  $R_{jk}$  enthält die 9 „Richtungscosini“ zwischen den Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_k^*$ .

**Orthogonalität des Transformationstensors:**

**Bem.:** Die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  erfahren eine reine Drehung, d. h.  $\mathbf{R}$  ist orthogonaler Tensor.

**Orthogonalitätsbedingung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \stackrel{!}{=} \mathbf{I} &= R_{jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) R_{pn} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p) = R_{jk} R_{pn} \delta_{kn} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p \\ &= R_{jk} R_{pk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p) \end{aligned}$$

Mit  $\mathbf{I} = \delta_{jp} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$  folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\boxed{R_{jk} R_{pk} = \delta_{jp}} \quad (*)$$

**Bem.:** (\*) liefert 6 Bedingungen an die 9 Richtungscosini ( $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \text{sym}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T)$ ), d. h. nur 3 der 9 Winkelfunktionen sind voneinander unabhängig, so daß die Drehung des Bezugssystems durch 3 Winkel darstellbar ist.

## (B) EINFÜHRUNG CARDANOSCHER WINKEL

**Idee:** Drehung um 3 Achsen, die durch die Basisrichtungen  $\mathbf{e}_i$  gegeben sind. Dieses Vorgehen geht zurück auf GIROLAMO CARDANO (1501-1576).

**Vorgehensweise:** Man setzt die Drehung des Bezugssystems aus drei voneinander unabhängigen Drehungen um die Achsen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  zusammen. Jede Drehung wird durch einen Transformationstensor  $\mathbf{R}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ausgedrückt.

Drehung von  $\mathbf{e}_i$  um  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$

$$\mathbf{e}_i^* = \{\mathbf{R}_1 \cdot [\mathbf{R}_2 \cdot (\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i)]\} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3$$

Drehung von  $\mathbf{e}_i$  um  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \{\mathbf{R}_3 \cdot [\mathbf{R}_2 \cdot (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{e}_i)]\} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$$

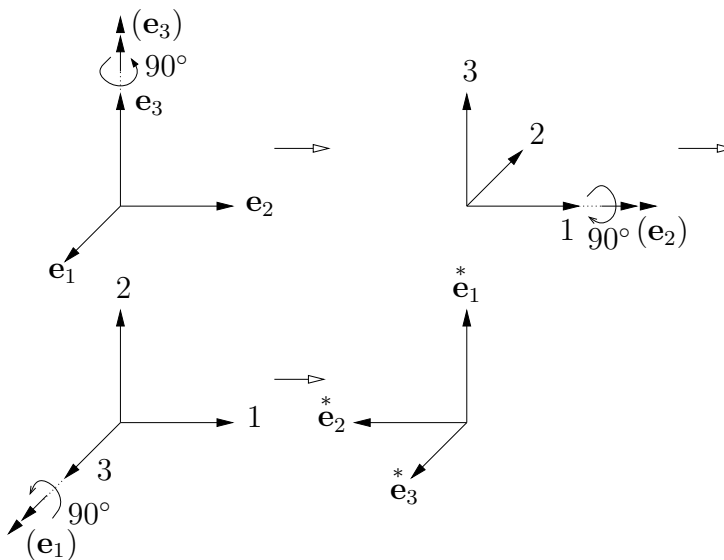
Man erkennt

$$\mathbf{R} \neq \bar{\mathbf{R}} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}^* \neq \bar{\mathbf{e}}_i$$

**Bem.:** Das Ergebnis der orthogonalen Transformation hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab.

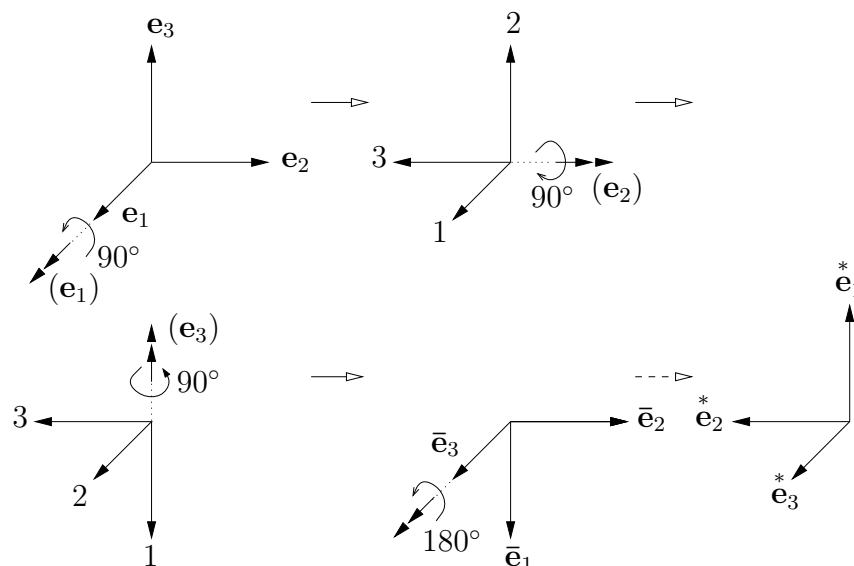
**Veranschaulichung:**

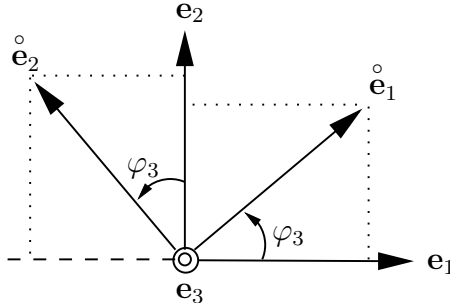
(a) Drehung um  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$  (z. B. jeweils um  $90^\circ$ )



(b) Drehung um  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (z. B. jeweils um  $90^\circ$ )

mit



**Bestimmung der orthogonalen Drehtensoren  $\mathbf{R}_i$** (a) Drehung um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse

Es gilt:

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_1 = \cos \varphi_3 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi_3 \mathbf{e}_2$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_2 = -\sin \varphi_3 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_3 \mathbf{e}_2$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$$

Es gilt allgemein

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i = R_{3jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = R_{3jk} \delta_{ki} \mathbf{e}_j = R_{3ji} \mathbf{e}_j$$

so daß durch Koeffizientenvergleich

$$\mathbf{R}_3 = R_{3ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{3ji} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Drehung um die  $\mathbf{e}_2$ - und  $\mathbf{e}_1$ -Achse

Es folgt in Analogie zum Vorangegangenen

$$\mathbf{R}_2 = R_{2ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{2ji} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = R_{1ji} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \quad \text{mit} \quad R_{1ji} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix}$$

**Bem.:** Der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  kann aus den Einzelrotationen unter Beachtung der Reihenfolge der Drehungen zusammengesetzt werden.(c) Bestimmung der Gesamtdrehung  $\mathbf{R}$ (c<sub>1</sub>) bei Drehung von  $\mathbf{e}_i$  um  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$ 

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \overset{*}{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3 \\ &= R_{1ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) R_{2no} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) R_{3pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= R_{1ij} R_{2no} R_{3pq} \delta_{jn} \delta_{op} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \\ &= \underbrace{R_{1ij} R_{2jo} R_{3oq}}_{\overset{*}{R}_{iq}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \end{aligned}$$

mit

$${}^*R_{iq} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

(c<sub>2</sub>) bei Drehung von  $\mathbf{e}_i$  um  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1 \\ &= \underbrace{R_{3ij} R_{2jo} R_{1oq}}_{\bar{R}_{iq}} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q) \end{aligned}$$

mit

$$\bar{R}_{iq} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 \\ -\sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

### Orthogonalität der CARDANOSchen Drehtensoren:

Es gilt für alle  $\mathbf{R} \in \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, {}^*\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}}\}$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \text{ d. h. } \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad (\det \mathbf{R})^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Orthogonalität}$$

darüber hinaus gilt für alle Drehtensoren

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad : \quad \text{„eigentliche“ Orthogonalität}$$

**Bem.:** Eine Basistransformation mit „uneigentlich“ orthogonalen Transformationen ( $\det \mathbf{R} = -1$ ) erzeugt aus einem „rechtshändigen“ ein „linkshändiges“ Basissystem.

### Beispiel zur Orthogonalität:

**hier:** Untersuchung von  $\mathbf{R}_3 = R_{3ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$

$$\text{mit } R_{3ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_3^T &= R_{3ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) R_{3on} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= R_{3ij} R_{3on} \delta_{jn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) = R_{3in} R_{3on} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) \end{aligned}$$

worin

$$R_{3in} R_{3on} = \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{io}$$



und erhält

$$\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_3^T = \delta_{io} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_o) = \mathbf{I} \quad \text{q. e. d.}$$

außerdem folgt

$$\det \mathbf{R}_3 := \det (R_{3ij}) = 1 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_3 \text{ ist eigentlich orthogonal}$$

### Darstellung von Rotationstensoren:

Es gilt allgemein bei Transformation zwischen Basissystemen  $\bar{\mathbf{e}}_i$  und Basissystemen  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i &= \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \bar{R}_{ik} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \\ \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{e}}_i &= \bar{\mathbf{R}}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}}^{-1} \equiv \bar{\mathbf{R}}^T \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{R}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k$$

**Konsequenz:** Durch Vergleich folgt

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}^T, \quad \text{d. h.,} \quad \overset{\circ}{R}_{ik} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k = (\bar{R}_{ik})^T \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \quad \longrightarrow \quad \overset{\circ}{R}_{ik} = \bar{R}_{ki}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{R}} &= \overset{\circ}{R}_{ik} (\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{e}}_k) = \overset{\circ}{R}_{ik} (\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_k) \\ &= \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{ni} \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{R}_{pk} \bar{\mathbf{e}}_p = (\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{pk}) \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_p \stackrel{!}{=} \bar{R}_{pn} \bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_p = \bar{\mathbf{R}}^T \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} \bar{R}_{pk} \stackrel{!}{=} \bar{R}_{pn} \quad \longleftrightarrow \quad \bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} = \delta_{nk}}$$

**Bem.:** Aufgrund der zueinander inversen Koeffizientenmatrizen  $\bar{R}_{ni}$  und  $\overset{\circ}{R}_{ik}$  können die 9 unbekanntenen Koeffizienten von  $\overset{\circ}{R}_{ik}$  mit Hilfe der 6 Gleichungen aus  $\bar{R}_{ni} \overset{\circ}{R}_{ik} = \delta_{nk}$  bestimmt werden. Wegen  $\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^T$  gilt  $\bar{R}_{ni}^{-1} = (\bar{R}_{ni})^T = \bar{R}_{in}$ , d. h.

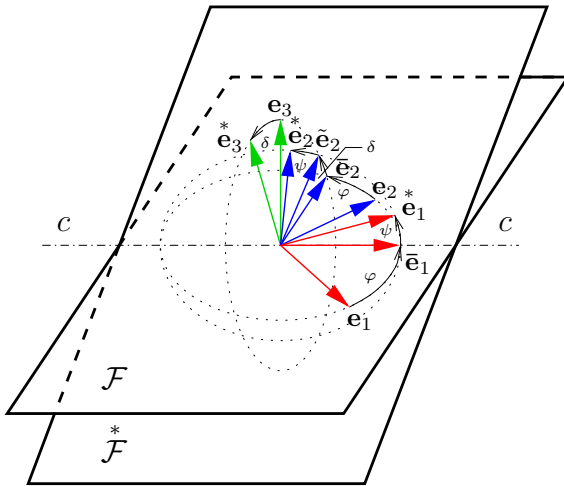
$$\boxed{\overset{\circ}{R}_{ik} = (\bar{R}_{ik})^T = \bar{R}_{ki}}$$

## (C) EINFÜHRUNG EULERSCHER WINKEL

**Bem.:** Drehung eines Basissystems  $\mathbf{e}_i$  um drei Achsen.

Einführung der Winkel  $\varphi$ ,  $\delta$  und  $\psi$  um die Achsen  $\mathbf{e}_3$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3^*$

**Veranschaulichung:**



**Idee:** Die Ebenen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}^*$  werden durch die Vektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  bzw.  $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*$  aufgespannt. Die Vektoren  $\mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{e}_3^*$  stehen jeweils senkrecht zur entsprechenden Ebene. Die Basissysteme  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{e}_i^*$  können mit Hilfe des EULERSCHEN Drehtensors  $\mathbf{R}$  ineinander überführt werden:

$$\mathbf{e}_i^* := \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i$$

1. Schritt:

Drehung in der Ebene  $\mathcal{F}$  um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse mit dem Winkel  $\varphi$  rotiert das Basissystem  $\mathbf{e}_i$ , so daß  $\bar{\mathbf{e}}_1$  in Richtung der Achse  $c-c$  zeigt. Dies liefert den Drehtensor

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem  $\bar{\mathbf{e}}_i$

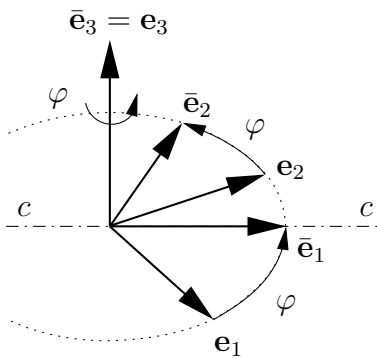
$$\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i = R_{3jk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i = R_{3ji} \mathbf{e}_j$$

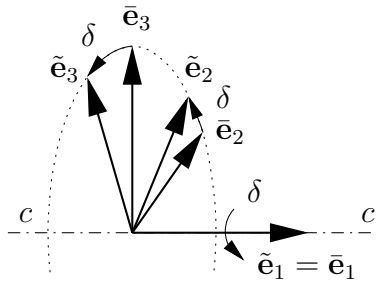
bzw. im einzelnen

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = R_{3j1} \mathbf{e}_j = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = R_{3j2} \mathbf{e}_j = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = R_{3j3} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_3.$$



2. Schritt:

Drehung des Basissystems  $\bar{\mathbf{e}}_i$  um die  $\bar{\mathbf{e}}_1$ -Achse mit dem Winkel  $\delta$ , so daß  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  in der Ebene  $\mathcal{F}^*$  liegt und  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  senkrecht auf der Ebene  $\mathcal{F}^*$  steht. Dies liefert den Drehtensor

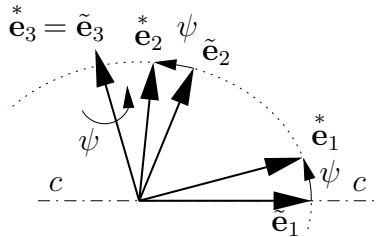
$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k .$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem  $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{R}_{1jk} (\bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k) \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{R}_{1ji} \bar{\mathbf{e}}_j$$

bzw. im einzelnen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \bar{R}_{1j1} \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \bar{R}_{1j2} \bar{\mathbf{e}}_j = \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &= \bar{R}_{1j3} \bar{\mathbf{e}}_j = -\sin \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_3 . \end{aligned}$$

3. Schritt:

Drehung in der Ebene  $\mathcal{F}^*$  um die  $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Achse mit dem Winkel  $\psi$  rotiert das Basissystem  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ . Dies liefert den Drehtensor

$$\tilde{\mathbf{R}}_3 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_j \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k$$

Damit ergibt sich für das neue Basissystem  $\mathbf{e}^*_i$

$$\mathbf{e}^*_i = \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{R}_{3jk} (\tilde{\mathbf{e}}_j \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k) \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{R}_{3ji} \tilde{\mathbf{e}}_j$$

bzw. im einzelnen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^*_1 &= \tilde{R}_{3j1} \tilde{\mathbf{e}}_j = \cos \psi \tilde{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}^*_2 &= \tilde{R}_{3j2} \tilde{\mathbf{e}}_j = -\sin \psi \tilde{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{e}^*_3 &= \tilde{R}_{3j3} \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{\mathbf{e}}_3 . \end{aligned}$$

**Zusammenfassung:**

(a) Einsetzen von  $\tilde{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^*_1 &= \cos \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi (\cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{e}^*_2 &= -\sin \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi (\cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{e}^*_3 &= \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\sin \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1^* &= \cos \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \sin \psi \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\
 \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi \bar{\mathbf{e}}_1 + \cos \psi \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2 + \cos \psi \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3 \\
 \mathbf{e}_3^* &= \phantom{-\sin \psi \bar{\mathbf{e}}_1} - \phantom{\cos \psi \cos \delta \bar{\mathbf{e}}_2} + \phantom{\cos \psi \sin \delta \bar{\mathbf{e}}_3} \\
 \longrightarrow \mathbf{e}_i^* &= \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \underbrace{(\bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i)}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} =: \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1
 \end{aligned}$$

(b) Einsetzen von  $\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1^* &= \cos \psi (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \sin \psi \cos \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \sin \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \psi \cos \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_3^* &= -\sin \delta (-\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \delta \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1^* &= (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \delta \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + \\
 &\quad + (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \delta \cos \varphi) \mathbf{e}_2 + \sin \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_2^* &= (-\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \delta \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + \\
 &\quad + (-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \delta \cos \varphi) \mathbf{e}_2 + \cos \psi \sin \delta \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_3^* &= \sin \delta \sin \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \delta \cos \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \delta \mathbf{e}_3 \\
 \longrightarrow \mathbf{e}_i^* &= \bar{\mathbf{R}} \cdot \underbrace{(\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i)}_{\bar{\mathbf{e}}_i} =: \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}_3 = \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_3
 \end{aligned}$$

Drehtensoren  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{R}^*$ :

Für die Gesamttrotation folgt damit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_i^* &= (\tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_3) \mathbf{e}_i =: \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \\
 &= (\tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1) \cdot \underbrace{(\mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{e}_i)}_{\bar{\mathbf{e}}_i} = \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \underbrace{(\bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_i)}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} = \underbrace{\tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i}_{\mathbf{e}_i^*}
 \end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e}_i^* =: \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{e}_i^* \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^T}$$

und damit analog zu vorherigen Überlegungen

$$\longrightarrow \quad \boxed{{}^*R_{ik} = (R_{ik})^T = R_{ki}}$$

Darstellung des Rotationstensors:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \delta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \delta \sin \varphi & \sin \delta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \delta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \delta \cos \varphi & -\sin \delta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \delta & \cos \psi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

Zusammenfassen von Transformationstensoren mit unterschiedlichen Basissystemen:

**Beispiel:**  $\bar{\mathbf{R}} := \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i = (\tilde{\mathbf{R}}_3 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_i$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}} &= \tilde{R}_{3ik} (\tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_k) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \tilde{R}_{3ik} (\underbrace{\bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{e}}_k}_{\bar{R}_{1si} \bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{R}_{1tk} \bar{\mathbf{e}}_t}) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}} &= \bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_t) \bar{R}_{1no} (\bar{\mathbf{e}}_n \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} \bar{R}_{1no} \delta_{tn} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \\ &= \underbrace{\bar{R}_{1si} \tilde{R}_{3ik} \bar{R}_{1tk} \bar{R}_{1to}}_{\bar{R}_{so}} (\bar{\mathbf{e}}_s \otimes \bar{\mathbf{e}}_o) \end{aligned}$$

Damit erhält man für den Rotationstensor  $\bar{\mathbf{R}}$ :

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi \cos \delta & \cos \psi \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \psi \sin \delta & \cos \psi \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_k$$

**Bem.:** Die Kombination einzelner Drehungen (z. B.  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$  mit  $\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i$ ) vereinfacht sich bei der Verwendung der CARDANOSchen Winkel, da sich die Rotationen stets auf dieselbe Basis  $\mathbf{e}_i$  beziehen.

**Drehung um eine raumfeste Achse:**

**Bem.:** Eine Drehung um 3 voneinander unabhängige Achsen kann auch als Drehung um die resultierende Drehachse dargestellt werden:

→ EULER-RODRIGUES-Form der räumlichen Drehung

Die EULER-RODRIGUES-Form der Drehung wird später behandelt (vgl. Kapitel 1.7).

## 1.5 Tensoren höherer Stufe

**Definition:** Ein beliebiger Tensor  $n$ -ter Stufe sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \overset{n}{\mathbf{A}} &\in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3 \quad (n\text{-mal}) \\ \text{mit } \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^3 &: n\text{-facher dyadischer Produktraum} \end{aligned}$$

**Bem.:** i. d. R.  $n \geq 2$ ; jedoch existieren Sonderfälle für  $n = 1$  (Vektor) und  $n = 0$  (Skalar).

### Allgemeine Darstellung der linearen Abbildung

**Definition:** Eine lineare Abbildung ist ein „verjüngendes Produkt“ der Form

$$\overset{n}{\mathbf{A}} \circ \overset{s}{\mathbf{B}} = \overset{n-s}{\mathbf{C}} \quad \text{mit } n \geq s$$

Mit dem  $\circ$  als Verjüngungsoperator (Punkteoperator). Die Anzahl der Punkte gibt hier den Grad der Verjüngung an.

Erläuterung am Beispiel einfacher Tensoren:  $\overset{4}{\mathbf{A}} : \mathbf{B} = \mathbf{C}$

$$\underbrace{(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})}_{\overset{4}{\mathbf{A}}} : \underbrace{(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f})}_{\mathbf{B}} = \underbrace{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{f})}_{\mathbf{C}} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

### Fundamentaltensoren 4. Stufe

**Bem.:** Fundamentaltensoren 4. Stufe werden aus dem dyadischen Produkt von 2 Identitätstensoren 2. Stufe und den damit darstellbaren unabhängigen Transpositionen gebildet.

Man führt ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{24}{T}} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

mit  $(\cdot)^{\overset{ik}{T}}$ : spezielle Transposition; d. h. Vertauschung des  $i$ -ten mit dem  $k$ -ten Basissystem

**Bem.:** Weitere Transpositionen von  $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  liefern keine weiteren unabhängigen Tensoren. Die o. g. Fundamentaltensoren genügen der Eigenschaft

$$\overset{4}{\mathbf{A}} = \overset{4}{\mathbf{A}}^T \quad \text{mit} \quad \overset{4}{\mathbf{A}}^T = (\overset{4}{\mathbf{A}}^{\overset{13}{T}})^{\overset{24}{T}}$$

**Konsequenz:** Die Fundamentaltensoren 4. Stufe sind symmetrisch (bzgl. eine Vertauschung der beiden ersten mit den beiden letzten Basissystemen).

**Eigenschaften der Fundamentaltensoren 4. Stufe**(a) identische Abbildung

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : A_{st}(\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\
&= A_{st} \delta_{is} \delta_{jt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = A_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{A} \\
\longrightarrow \overset{4}{\mathbf{I}} &:= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} \text{ ist Identitätstensor 4. Stufe}
\end{aligned}$$

(b) „transponierende“ Abbildung

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{24}{T}} : \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) A_{st}(\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\
&= A_{st} \delta_{js} \delta_{it} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = A_{ji} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{A}^T
\end{aligned}$$

(c) „spurbildende“ Abbildung

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{A} &= (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) A_{st}(\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \\
&= A_{st} \delta_{js} \delta_{it} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = A_{jj} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) \\
&= (\mathbf{A} : \mathbf{I}) \mathbf{I} = (\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{I}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = A_{st} (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) \cdot (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = A_{st} \delta_{sj} \delta_{tj} = A_{jj}$$

**Spezifische Tensoren 4. Stufe**

Es seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  beliebige Tensoren zweiter Stufe. Dann kann mit  $\overset{4}{\mathbf{A}}$  ein vierstufiger Tensor definiert werden, der über folgende Eigenschaften verfügt:

$$\begin{aligned}
\overset{4}{\mathbf{A}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}^T)^{\overset{14}{T}} \quad (*) \\
\overset{4}{\mathbf{A}}^T &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}}]^T = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T)^{\overset{23}{T}} \\
\overset{4}{\mathbf{A}}^{-1} &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}}]^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})^{\overset{23}{T}}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(\cdot)^T = [(\cdot)^{\overset{13}{T}}]^{\overset{24}{T}}$$

Mit (\*) können die folgenden Regeln abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{D}) \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} : \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T \\
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} \cdot \mathbf{v} &= [\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})]^{\overset{23}{T}}
\end{aligned}$$

Mit der Definition eines vierstufigen Tensors  $\overset{4}{\mathbf{B}}$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} = [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{13}{T}}]^T \\ \overset{4}{\mathbf{B}}^T &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}]^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})^{\overset{24}{T}} \\ \overset{4}{\mathbf{B}}^{-1} &= [(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}}]^{-1} = (\mathbf{B}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^{\overset{24}{T}}\end{aligned}$$

läßt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C})^{\overset{23}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{23}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^T)^{\overset{24}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{23}{T}} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{\overset{24}{T}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C})\end{aligned}$$

und

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\overset{24}{T}} : \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}$$

Außerdem gilt

$$(\overset{4}{\mathbf{C}} :: \overset{4}{\mathbf{D}})^T = \overset{4}{\mathbf{D}}^T :: \overset{4}{\mathbf{C}}^T$$

worin  $\overset{4}{\mathbf{C}}$  und  $\overset{4}{\mathbf{D}}$  beliebige Tensoren vierter Stufe sind.

### Tensoren höherer Stufe und unvollständige Abbildungen

Um bei Tensoroperationen mit Tensoren höherer Stufe die Anzahl der in einem Skalarprodukt zu verbindenden Basisvektoren eindeutig festzulegen, wird bei einer unvollständigen Abbildung die Stufe des resultierenden Tensors mit Hilfe eines unterstrichenen oberen Index  $(\cdot)^{\underline{i}}$  angegeben.

#### Beispiele in Basisdarstellung:

$$\begin{aligned}(\overset{4}{\mathbf{A}} : \overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{2}} &= [A_{ijkl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) B_{mno} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o)]^{\underline{2}} \\ &= A_{ijkl} B_{mno} \delta_{km} \delta_{ln} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_o) \\ (\overset{4}{\mathbf{A}} : \overset{3}{\mathbf{B}})^{\underline{1}} &= [A_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) B_{mno} (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o)]^{\underline{1}} \\ &= A_{ij} B_{mno} \delta_{im} \delta_{jn} \mathbf{e}_o\end{aligned}$$

**Merke:** Die unvollständige Abbildung wird durch eine hinreichende Anzahl von Skalarprodukten der inneren Basisvektoren gebildet.



## 1.6 Fundamentaltensor 3. Stufe (RICCI-Tensor)

**Bem.:** Der Fundamentaltensor 3. Stufe wird eingeführt im Zusammenhang mit der Bildung „äußerer Produkte“ (z. B. Kreuzprodukt zwischen Vektoren).

**Definition:** Der Fundamentaltensor  $\overset{3}{\mathbf{E}}$  genügt der Vorschrift

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

**Einführung von  $\overset{3}{\mathbf{E}}$  in Basisdarstellung:**

Es gilt

$$\overset{3}{\mathbf{E}} = e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$$

mit dem „Permutationssymbol“  $e_{ijk}$

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutation} \\ 0 & : \text{doppelte Indizierung} \\ -1 & : \text{ungerade Permutation} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1 \\ \text{alle übrigen } e_{ijk} \text{ verschwinden} \end{cases}$$

**Anwendung von  $\overset{3}{\mathbf{E}}$  auf das Kreuzprodukt von Vektoren:**

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (u_s \mathbf{e}_s \otimes v_t \mathbf{e}_t) \\ &= e_{ijk} u_s v_t \delta_{js} \delta_{kt} \mathbf{e}_i = e_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Vergleich mit der bekannten Darstellung (vgl. TM I, 1.2 D)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \dots \quad \text{q. e. d.}$$

**Eine Identität für  $\overset{3}{\mathbf{E}}$ :**

Es gilt für eine unvollständige Abbildung 2. Stufe bzw. 4. Stufe zwischen zwei RICCI-Tensoren

$$(\overset{3}{\mathbf{E}} : \overset{3}{\mathbf{E}})^2 = 2\mathbf{I}, \quad (\overset{3}{\mathbf{E}} \cdot \overset{3}{\mathbf{E}})^4 = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{23} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{24}$$

## 1.7 Der axiale Vektor

**Bem.:** Der axiale Vektor (Pseudovektor) dient u. a. zur Darstellung von Rotationen (Drehvektor).

**Definition:** Der axiale Vektor  $\overset{\text{A}}{\mathbf{t}} \in \mathcal{V}^3$  ist dem schiefssymmetrischen Anteil  $\text{skw } \mathbf{T}$  eines beliebigen Tensors  $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  über die folgende Vorschrift zugeordnet:

$$\overset{\text{A}}{\mathbf{t}} := \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : \mathbf{T}^T$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} &= \frac{1}{2} e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) T_{st} (\mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_s) \\ &= \frac{1}{2} e_{ijk} t_{st} \delta_{jt} \delta_{ks} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} e_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{2} [(T_{32} - T_{23}) \mathbf{e}_1 + (T_{13} - T_{31}) \mathbf{e}_2 + (T_{21} - T_{12}) \mathbf{e}_3] \end{aligned}$$

Es gilt mit 1.3 (b)

$$\mathbf{T} = \text{sym } \mathbf{T} + \text{skw } \mathbf{T}$$

so dass für den axialen Vektor von  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} &= \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : (\text{sym } \mathbf{T} + \text{skw } \mathbf{T})^T \\ &= \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : (\text{skw } \mathbf{T}^T) = -\frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : (\text{skw } \mathbf{T}) \end{aligned}$$

**Bem.:** Ein symmetrischer Tensor besitzt keinen axialen Vektor.

### Axialer Vektor und lineare Abbildung:

Es gilt (man bestätige durch Ausrechnen)

$$(\text{skw } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$$

### Axialer Vektor und das Vektorprodukt zwischen Tensoren:

**Definition:** Das Vektorprodukt von 2 Tensoren  $\{\mathbf{T}, \mathbf{S}\} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  genügt der Vorschrift

$$\mathbf{S} \times \mathbf{T} = \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T)$$

**Bem.:** Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zwischen 2 Tensoren liefert einen Vektor.

Im Vergleich mit der Definition des axialen Vektors gilt

$$\mathbf{I} \times \mathbf{T} = \overset{3}{\mathbf{E}} : \mathbf{T}^T = 2 \overset{\text{A}}{\mathbf{t}}$$

außerdem gilt für das Vektorprodukt von 2 Tensoren

$$\mathbf{S} \times \mathbf{T} = -\mathbf{T} \times \mathbf{S}$$

**Axialer Vektor und das äußere Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor:**

**Definition:** Das äußere Tensorprodukt zwischen einem Vektor  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^3$  und einem Tensor  $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^3 \otimes \mathcal{V}^3$  genügt der Vorschrift

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}); \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$$

**Bem.:** Das äußere Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor liefert einen Tensor.

Es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{u} \times \mathbf{T} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{T})^T = -\mathbf{T} \times \mathbf{u}$$

→ d. h.  $\mathbf{u} \times \mathbf{T}$  ist schiefssymmetrisch

$$\mathbf{u} \times \mathbf{T} = [\overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})]^2$$

mit  $(\cdot)^2$  : „unvollständige“ lineare Abbildung (Assoziation), deren Ergebnis ein Tensor 2. Stufe ist.

Auswertung in Basisdarstellung liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{T} &= [(e_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (u_r \mathbf{e}_r \otimes t_{st} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t)]^2 \\ &= e_{ijk} u_r t_{st} \delta_{jr} \delta_{ks} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \\ &= e_{ijk} u_j t_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) \end{aligned}$$

insbesondere gilt für  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{I}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{I} = [\overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{I})]^2 = e_{ijk} u_j \delta_{kt} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) = e_{ijt} u_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t)$$

außerdem gilt für den speziellen Tensor  $\mathbf{u} \times \mathbf{I}$

$$\overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = -2 \mathbf{u}$$

$$\rightarrow \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \times \mathbf{I})^T$$

**Konsequenz:** Im Tensor  $\mathbf{u} \times \mathbf{I}$  ist  $\mathbf{u}$  bereits der diesem Tensor zugeordnete axiale Vektor.

Schließlich gilt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{I} = -\overset{3}{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u}$$

$$\rightarrow \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{u} \times \mathbf{I}) = -\overset{3}{\mathbf{E}} : (\overset{3}{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u}) = -(\overset{3}{\mathbf{E}} : \overset{3}{\mathbf{E}})^2 \cdot \mathbf{u} \stackrel{!}{=} -2 \mathbf{u}$$

$$\text{d. h. } (\overset{3}{\mathbf{E}} : \overset{3}{\mathbf{E}})^2 = 2 \mathbf{I}$$

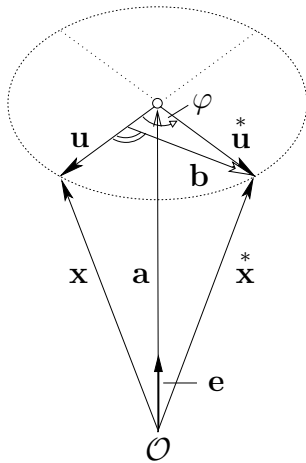
Einige zusätzliche Regeln:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{T} : \boldsymbol{\Omega} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{w} \times \mathbf{I}$$

## ANWENDUNGSBEISPIEL FÜR DAS TENSORPRODUKT ZWISCHEN VEKTOR UND TENSOR

Drehung um eine raumfeste Achse



Drehung von  $\mathbf{x}$  um die Achse  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{a} + \mathbf{u}^* = \mathbf{a} + C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{a} \\ \mathbf{b} = C_2 (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\text{und} \quad \varphi = \varphi \mathbf{e}; \quad |\mathbf{e}| = 1$$

Bestimmung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ :

(a) Es gilt für den Winkel zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}^*$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*}{|\mathbf{u}| |\mathbf{u}^*|} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}^*|$$

außerdem gilt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \cdot (C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}) = C_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}} = C_1 |\mathbf{u}|^2 = 0, \text{ da } \mathbf{u} \perp \mathbf{b}$$

damit folgt

$$\cos \varphi = \frac{C_1 |\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} = C_1 \quad \longrightarrow \quad C_1 = \cos \varphi$$

(b) Es gilt für den Winkel zwischen  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{u}^*$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^*}{|\mathbf{b}| |\mathbf{u}^*|}$$

außerdem gilt

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{b} \cdot (C_1 \mathbf{u} + \mathbf{b}) = C_1 \underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2 = 0, \text{ da } \mathbf{u} \perp \mathbf{b}$$

und

$$|\mathbf{b}| = C_2 |\mathbf{e} \times \mathbf{x}| = C_2 \underbrace{|\mathbf{e}|}_1 \underbrace{|\mathbf{x}| \sin \angle(\mathbf{e}; \mathbf{x})}_{|\mathbf{u}|} = C_2 |\mathbf{u}|$$

so daß

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}||\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{C_2 |\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = C_2 \quad \longrightarrow \quad C_2 = \sin \varphi$$

Damit folgt für  $\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} + \cos \varphi [\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}] + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{x})$$

### Ermittlung des Rotationstensors $\mathbf{R}$ :

für das Tensorprodukt zwischen Vektor und Tensor gilt

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$$

damit folgt

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \cdot \mathbf{x} + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} \stackrel{!}{=} \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{I})} \quad (*)$$

**Bem.:** (\*) ist die EULER-RODRIGUES-Form der räumlichen Drehung.

**Beispiel:** Drehung um die  $\mathbf{e}_3$ -Achse

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \cos \varphi_3 (\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \sin \varphi_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{I})$$

Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{I} &= [\overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{I})]^2 \\ &= [e_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l)]^2 \\ &= e_{ijk} \delta_{j3} \delta_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) = e_{i3l} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \cos \varphi_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \sin \varphi_3 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= R_{3ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad R_{3ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{q. e. d.}$$

## 1.8 Das äußere Tensorprodukt von Tensoren

**Definition:** Das äußere Tensorprodukt von Tensoren ist wie folgt definiert:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) := \mathbf{A}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}\mathbf{u}_2 - \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \times \mathbf{B}\mathbf{u}_1$$

**Bem.:** Das äußere Tensorprodukt von Tensoren 2.Stufe liefert als Ergebnis einen Tensor 2.Stufe.

Daraus läßt sich direkt ableiten:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$$

Darüber hinaus gelten die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \otimes \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) &= 2\mathbf{I} \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Mit der o. g. Definition kann leicht gezeigt werden, daß

$$[(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) : \mathbf{C}][(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3] = e_{ijk} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_k$$

Das äußere Tensorprodukt in Basissystemen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= A_{ik} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \otimes B_{no} (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= A_{ik} B_{no} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_n) \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_o) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_n = \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_n) = e_{inj} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_o = \overset{3}{\mathbf{E}} : (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_o) = e_{kop} \mathbf{e}_p \end{cases}$$

$$\longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ik} B_{no} e_{inj} e_{kop} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{I} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B}^T - \\ &\quad - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{I}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}) - \\ &\quad - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{C} + (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

**Der Kofaktor, der adjungierte Tensor und die Determinante:**

Es gelten die Beziehungen

$$\text{cof } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \times \mathbf{A} =: \overset{+}{\mathbf{A}}, \quad \text{adj } \mathbf{A} = (\text{cof } \mathbf{A})^T$$

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{A} = \det |A_{ik}| = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_3}$$

Es gilt in Basisdarstellung

$$\overset{+}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (A_{ik} A_{no} e_{inj} e_{kop}) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p) = \overset{+}{A}_{jp} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_p)$$

**Bem.:** In der Koeffizientenmatrix  $\overset{+}{A}_{jp}$  des Kofaktors  $\text{cof } \mathbf{A}$  steht an jeder Position die zugehörige Unterdeterminante des Ursprungstensors, z. B.

$$\overset{+}{A}_{11} = A_{22} A_{33} - A_{23} A_{32} \quad \text{u. s. w.}$$

**Der inverse Tensor:**

Es gilt die Beziehung

$$\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \text{adj } \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert, wenn } \det \mathbf{A} \neq 0$$

**Rechenregeln für den Kofaktor, die Determinante und den inversen Tensor:**

$$\det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

$$\det (\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det \mathbf{A}$$

$$\det \mathbf{I} = 1$$

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

$$\det \overset{+}{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{A})^2$$

$$\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$$

$$\det (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \overset{+}{\mathbf{B}} + \det \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^+ = \overset{+}{\mathbf{A}} \cdot \overset{+}{\mathbf{B}}$$

$$(\overset{+}{\mathbf{A}})^T = (\mathbf{A}^T)^+$$

## 1.9 Das Eigenwertproblem und die Invarianten eines Tensors

**Definition:** Für das Eigenwertproblem eines beliebigen Tensors zweiter Stufe  $\mathbf{A}$  gilt

$$(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \begin{cases} \gamma_{\mathbf{A}} & : \text{Eigenwert} \\ \mathbf{a} & : \text{Eigenvektor} \end{cases}$$

Auflösen nach  $\mathbf{a}$  liefert

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{0} = \text{adj}(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \frac{\mathbf{0}}{\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I})}$$

**Konsequenz:** Diese Gleichung liefert für  $\mathbf{a}$  nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die charakteristische Gleichung erfüllt ist, d. h.

$$\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) = 0$$

Mit der Rechenregel für die Determinante

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \frac{1}{6} [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] : (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{A} + \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{B} + \frac{1}{3} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) : \mathbf{A} + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) : \mathbf{B} + \frac{1}{6} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) : \mathbf{A} + \frac{1}{6} (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) : \mathbf{B} \\ &= \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \overset{+}{\mathbf{B}} + \det \mathbf{B} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) &= \det \mathbf{A} + \overset{+}{\mathbf{A}} : (-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) + \mathbf{A} : (-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) + \det(-\gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) \\ &= \det \mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{I} + \gamma_{\mathbf{A}}^2 \frac{1}{2} \mathbf{A} : (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) - \gamma_{\mathbf{A}}^3 \det \mathbf{I} = 0 \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{I}) : \mathbf{I} \\ II_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{I} \\ III_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{A} \end{aligned}$$

kann die charakteristische Gleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\det(\mathbf{A} - \gamma_{\mathbf{A}} \mathbf{I}) = III_{\mathbf{A}} - \gamma_{\mathbf{A}} II_{\mathbf{A}} + \gamma_{\mathbf{A}}^2 I_{\mathbf{A}} - \gamma_{\mathbf{A}}^3 = 0$$

**Bem.:** Die Koeffizienten  $I_{\mathbf{A}}$ ,  $II_{\mathbf{A}}$  und  $III_{\mathbf{A}}$  stellen die *drei skalaren Hauptinvarianten* eines Tensors  $\mathbf{A}$  dar, die eine wichtige Rolle in der Kontinuumsmechanik spielen.

### Alternative Darstellung der Invarianten

Durch Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} : \mathbf{I} = \text{tr} \mathbf{A} \\ II_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{2} (I_{\mathbf{A}}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})] \\ III_{\mathbf{A}} &= \frac{1}{6} I_{\mathbf{A}}^3 - \frac{1}{2} I_{\mathbf{A}}^2 ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{I}) + \frac{1}{3} (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}^T) : \mathbf{A} = \\ &= \frac{1}{6} [(\text{tr} \mathbf{A})^3 - 3 \text{tr} \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) + 2 \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A})] = \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

Durch Eigenwerte:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} + \gamma_{\mathbf{A}(2)} + \gamma_{\mathbf{A}(3)} \\ II_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} \gamma_{\mathbf{A}(2)} + \gamma_{\mathbf{A}(2)} \gamma_{\mathbf{A}(3)} + \gamma_{\mathbf{A}(3)} \gamma_{\mathbf{A}(1)} \\ III_{\mathbf{A}} &= \gamma_{\mathbf{A}(1)} \gamma_{\mathbf{A}(2)} \gamma_{\mathbf{A}(3)} \end{aligned}$$

CALEY-HAMILTON-Theorem:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - I_{\mathbf{A}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + II_{\mathbf{A}} \mathbf{A} - III_{\mathbf{A}} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$



## 2 Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

### 2.1 Einführung des Funktionsbegriffs

Bezeichnungen:

$$\text{es existiert } \left\{ \begin{array}{l} \phi(\dots) : \text{skalarwertige Funktion} \\ \mathbf{v}(\dots) : \text{vektorwertige Funktion} \\ \mathbf{T}(\dots) : \text{tensorwertige Funktion} \end{array} \right\} \text{ von } (\dots) \left\{ \begin{array}{l} \text{skalaren Variablen} \\ \text{vektoriellen Variablen} \\ \text{tensoriellen Variablen} \end{array} \right.$$

**Beispiel:**  $\phi(\mathbf{A})$  : skalarwertige Tensorfunktion

Begriffe:

- **Definitionsbereich** einer Funktion: Gesamtheit der Werte der unabhängig veränderlichen Größen (Variablen); i. d. R. zusammenhängend.
- **Bildbereich** einer Funktion: Gesamtheit der Werte der abhängig veränderlichen Größen:  $\phi(\dots)$ ;  $\mathbf{v}(\dots)$ ;  $\mathbf{T}(\dots)$ .

### 2.2 Funktionen skalarer Variablen

**hier:** Vektor- und tensorwertige Funktionen von reellen skalaren Variablen.

#### (a) VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN EINER VARIABLEN

es existiert:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha) \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} : \text{eindeutige vektorwertige Funktion,} \\ \quad \text{Bildbereich im offenen Gebiet } \mathcal{V}^3 \\ \alpha : \text{reelle skalare Variable} \end{array} \right.$$

Ableitung von  $\mathbf{u}(\alpha)$  mit dem Differentialquotienten:

$$\mathbf{w}(\alpha) := \mathbf{u}'(\alpha) := \frac{d\mathbf{u}(\alpha)}{d\alpha}$$

Differential von  $\mathbf{u}(\alpha)$ :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(\alpha) d\alpha$$

Einführung höherer Ableitungen und Differentiale:

$$d^2\mathbf{u} = d(d\mathbf{u}) = \mathbf{u}''(\alpha) d\alpha^2 = \frac{d^2\mathbf{u}(\alpha)}{d\alpha^2} d\alpha^2 \quad \text{u. s. w.}$$

(b) VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

es existiert:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad \text{mit} \quad \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\} : \text{reelle skalare Variablen}$$

partielle Ableitung von  $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ :

$$\mathbf{w}_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \dots) := \frac{\partial \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \alpha} =: \mathbf{u}_{,\alpha}$$

totales Differential von  $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ :

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}_{,\alpha} d\alpha + \mathbf{u}_{,\beta} d\beta + \mathbf{u}_{,\gamma} d\gamma + \dots$$

höhere partielle Ableitungen (Beispiele):

$$\mathbf{u}_{,\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \alpha^2}; \quad \mathbf{u}_{,\gamma\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\cdot)}{\partial \gamma \partial \beta}$$

**Bem.:** Die Reihenfolge partieller Ableitungen ist vertauschbar.

(c) TENSORIELLE FUNKTIONEN EINER BZW. MEHRERER VARIABLEN

Behandlung in Analogie zum Vorangegangenen

**Einige Rechenregeln:**

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}'$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}'$$

$$(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

**2.3 Funktionen vektorieller und tensorieller Variablen**(a) ABLEITUNG VON FELDFUNKTIONEN NACH DEM ORTSVEKTOR(GRADIENTENBILDUNG)

**Bem.:** Funktionen des Ortsvektors heißen **Feldfunktionen**. Ableitungen nach dem Ortsvektor werden als ‘‘Gradienten einer Funktion’’ bezeichnet.

**skalarwertige Funktionen**  $\phi(\mathbf{x})$

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) := \frac{d\phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \phi(\mathbf{x}) := \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{e}_i =: \phi_{,i} \mathbf{e}_i$$

**vektorwertige Funktionen  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$**

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Tensorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j =: v_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

**tensorwertige Funktionen  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$**

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{d\mathbf{T}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} =: \mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Tensorfeld 3. Stufe}$$

bzw. in Basissystemen

$$\text{grad } \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{\partial t_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j =: t_{ik,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j$$

**Bem.:** Gradientenbildung  $\text{grad}(\cdot) = \nabla(\cdot)$  (mit  $\nabla$  : Nabla-Operator) erhöht die Stufe der abgeleiteten Funktion.

## (b) ABLEITUNG VON FUNKTIONEN VON BELIEBIGEN VEKTOREN

### UND TENSOREN NACH TENSOREN

**Bem.:** Ableitungen nach den jeweiligen Variablen werden in Analogie zum Vorangegangenen behandelt, z. B.

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{T}, \mathbf{v})}{\partial t_{st}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t$$

### Einige spezielle Regeln für die Ableitung von Tensorfunktionen nach Tensoren

Für beliebige Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  gelten die folgenden Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}^T)^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}^T)^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^T + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A})^T \\ \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})}{\partial \mathbf{B}} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}^T)^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} &= -(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^T \\ \frac{\partial \mathbf{A}^+}{\partial \mathbf{A}} &= \det \mathbf{A} [(\mathbf{A}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1}) - (\mathbf{A}^{T-1} \otimes \mathbf{A}^{T-1})^T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\mathbf{C}} &= \alpha\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{C}} + \beta\frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{v} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\alpha\mathbf{A})}{\partial\mathbf{C}} &= \mathbf{A} \otimes \frac{\partial\alpha}{\partial\mathbf{C}} + \alpha\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \\
\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{24} \right]^T \cdot \mathbf{v} + \left[ \mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \right]^3 \\
\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{\partial\mathbf{C}} &= \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{13} \right]^T \cdot \mathbf{v} + \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{13} \right]^T \cdot \mathbf{u} \\
\frac{\partial(\mathbf{A} : \mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left( \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^T : \mathbf{B} + \left( \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}} \right)^T : \mathbf{A} \\
\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial\mathbf{C}} &= \left( \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{24} \right]^T \cdot \mathbf{B} \right)^4 + \left( \left[ \left( \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{C}} \right)^{14} \right]^T \cdot \mathbf{A} \right)^4
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T =: \mathbf{I}^4 \\
\frac{\partial\mathbf{A}^T}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^T \\
\frac{\partial(\mathbf{A} : \mathbf{I})\mathbf{I}}{\partial\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \\
\frac{\partial\mathbf{t} \cdot (\mathbf{A})}{\partial\mathbf{A}} &= -\frac{1}{2} \mathbf{E}^3
\end{aligned}$$

**Hauptinvarianten und ihre Ableitungen** (vgl. Kapitel 1.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad I_{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\
\frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \ast \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (I_{\mathbf{A}}^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{I}) \\
\frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial\mathbf{A}} &= \overset{+}{\mathbf{A}} \quad \text{mit} \quad III_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}
\end{aligned}$$

### (c) SPEZIELLE OPERATOREN

**hier:** Einführung der weiteren Differentialoperatoren  $\text{div}(\cdot)$  und  $\text{rot}(\cdot)$ .

**Divergenz eines Vektorfelds  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$**

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbf{I} =: \phi(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Skalarfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned}
\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= v_{i,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n) \\
&= v_{i,j} \delta_{in} \delta_{jn} = v_{n,n} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

**Divergenz eines Tensorfelds  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$** 

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\operatorname{grad} \mathbf{T}(\mathbf{x})] : \mathbf{I} =: \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= t_{ik,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n) \\ &= t_{ik,j} \delta_{kn} \delta_{jn} \mathbf{e}_i = t_{in,n} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

**Bem.:** Divergenzbildung  $\operatorname{div}(\cdot) = \nabla \cdot (\cdot)$  erniedrigt die Stufe der abgeleiteten Funktionen.

**Rotation eines Vektorfelds  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$** 

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \overset{3}{\mathbf{E}} : [\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})]^T =: \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad \longrightarrow \quad \text{Ergebnis ist ein Vektorfeld}$$

bzw. in Basissystemen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= e_{ijn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n) : v_{o,p} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_o) \\ &= e_{ijn} v_{o,p} \delta_{jp} \delta_{no} \mathbf{e}_i = e_{ijn} v_{n,j} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

**Konsequenz:**  $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})$  ist der 2-fache axiale Vektor, der dem schiefssymmetrischen Anteil von  $\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})$  zugeordnet ist.

**Bem.:** Rotationsbildung  $\operatorname{rot}(\cdot) = \operatorname{curl}(\cdot) = \nabla \times (\cdot)$  erhält die Stufe der abgeleiteten Funktion.

**LAPLACE-Operator**

$$\Delta(\cdot) := \operatorname{div} \operatorname{grad}(\cdot) \quad \longrightarrow \quad \text{weiter wie oben}$$

**Bem.:** LAPLACE-Operator  $\Delta(\cdot) = \nabla \cdot \nabla(\cdot)$  erhält die Stufe der abgeleiteten Funktion.

**Rechenregeln für die Operatoren  $\operatorname{grad}(\cdot)$ ,  $\operatorname{div}(\cdot)$  und  $\operatorname{rot}(\cdot)$** 

$$\operatorname{grad}(\phi\psi) = \phi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \phi$$

$$\operatorname{grad}(\phi\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\phi\mathbf{T}) = \mathbf{T} \otimes \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \mathbf{T}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{u}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = [\operatorname{grad} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes (\operatorname{grad} \mathbf{b})^T]^T$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\operatorname{grad} \mathbf{T})^T \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = [(\operatorname{grad} \mathbf{T})^T \cdot \mathbf{S}]^T + (\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{S})^T$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{T} : \mathbf{S}) = (\operatorname{grad} \mathbf{T})^T : \mathbf{S}^T + (\operatorname{grad} \mathbf{S})^T : \mathbf{T}^T$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{x} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) &= (\operatorname{div} \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T}^T : \operatorname{grad} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\operatorname{grad} \mathbf{u} \times \mathbf{v}) : \mathbf{I} - (\operatorname{grad} \mathbf{v} \times \mathbf{u}) : \mathbf{I} \\
&= \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \\
\operatorname{div}(\phi \mathbf{T}) &= \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \mathbf{T} \\
\operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) &= (\operatorname{grad} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{T} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S} \\
\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) &= \mathbf{v} \times \operatorname{div} \mathbf{T} + \operatorname{grad} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \\
\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}) &= \mathbf{v} \otimes \operatorname{div} \mathbf{T} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T}^T \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^+ &= \mathbf{0} \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v} \pm (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \pm \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0 \\
\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi &= \mathbf{0} \\
\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \mathbf{v})^T &= \operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(\phi \mathbf{v}) &= \phi \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \phi \times \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \\
&= \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

**GRASSMANN - Entwicklung:**

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{v} - (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$

## 2.4 Integralsätze

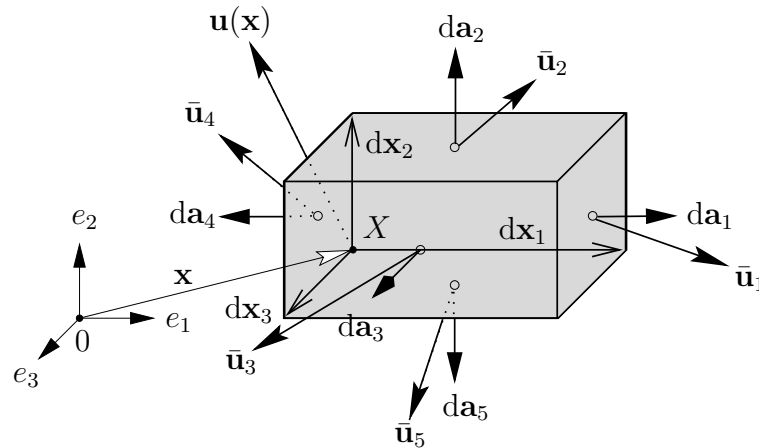
**Bem.:** Es werden einige Integralsätze für die Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale angegeben.

**Vor.:**  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  sei ein stetiges und hinreichend oft stetig differenzierbares Vektorfeld. Der Definitionsbereich von  $\mathbf{u}$  liege im  $\mathcal{V}^3$ .

(a) BEWEIS DES INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} = \int_V \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad \text{mit } d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$$

und  $\begin{cases} da & : \text{Oberflächenelement} \\ \mathbf{n} & : \text{nach außen orientierter Oberflächennormaleneinheitsvektor} \end{cases}$



**Ausgangspunkt:** Betrachtung eines infinitesimalen Volumenelements  $dv$ , aufgespannt im Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$ , und  $\bar{\mathbf{u}}_i$ , den Werten von  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  in den Flächenschwerpunkten der Teilflächen 1-6.

**Bestimmung der Flächenelementvektoren  $d\mathbf{a}_i$ :**

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1 &= dx_2 \times dx_3 = dx_2 dx_3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \\ &= dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1 = -d\mathbf{a}_4 \longrightarrow \mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_4 \end{aligned}$$

Man erhält außerdem

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_2 &= dx_3 dx_1 \mathbf{e}_2 = -d\mathbf{a}_5 \longrightarrow \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_5 \\ d\mathbf{a}_3 &= dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3 = -d\mathbf{a}_6 \longrightarrow \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_6 \end{aligned}$$

**Bem.:** Die Flächenvektoren erfüllen den Flächensatz  $\sum_{i=1}^6 d\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$

**Bestimmung des Volumenelements  $dv$ :**

$$dv = (dx_1 \times dx_2) \cdot dx_3 = dx_1 dx_2 dx_3$$

**Werte von  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  in den Teilflächenschwerpunkten:**

**Bem.:** Die Zuwächse von  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  in die Richtungen von  $dx_1, dx_2, dx_3$  werden durch die ersten Glieder einer TAYLOR-Reihenentwicklung dargestellt.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_4 &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3 \\ \bar{\mathbf{u}}_1 &= \bar{\mathbf{u}}_4 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1\end{aligned}$$

Man erhält außerdem

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_5 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2, \quad \bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{u}}_6 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3$$

Berechnung des Oberflächenintegrals

$$\int_{s(dv)} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} \longrightarrow \sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{u}}_1 \otimes d\mathbf{a}_1 + \underbrace{\bar{\mathbf{u}}_4 \otimes d\mathbf{a}_4}_{\left(\bar{\mathbf{u}}_1 - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1\right) \otimes (-d\mathbf{a}_1)} + \dots$$

so daß

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} dx_1 \otimes d\mathbf{a}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} dx_2 \otimes d\mathbf{a}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} dx_3 \otimes d\mathbf{a}_3$$

mit

$$d\mathbf{a}_1 = dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1, \quad d\mathbf{a}_2 = dx_1 dx_3 \mathbf{e}_2, \quad d\mathbf{a}_3 = dx_1 dx_2 \mathbf{e}_3$$

folgt

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \otimes \mathbf{e}_3 \right)}_{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \text{grad } \mathbf{u}} \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dv}$$

so daß

$$\sum_{i=1}^6 \bar{\mathbf{u}}_i \otimes d\mathbf{a}_i = \text{grad } \mathbf{u} dv$$

damit folgt bei Integration über ein beliebiges Volumen  $V$

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes d\mathbf{a} = \int_V \text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv \quad \text{q. e. d.} \quad (*)$$

## (b) BEWEIS DES GAUSSSCHEN INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) dv$$

**Ausgangspunkt:** Integralsatz (\*) bei skalarer Multiplikation mit dem Identitätstensor



$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{d}\mathbf{a} &= \mathbf{I} \cdot \int_V \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dv \\ \longrightarrow \int_S \underbrace{\mathbf{I} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{d}\mathbf{a}]}_{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a}} &= \int_V \underbrace{\mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{x})}_{\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})} \, dv \end{aligned}$$

so daß

$$\int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, dv \quad (**)$$

### (c) BEWEIS DES INTEGRALSATZES

$$\int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \, dv$$

**Ausgangspunkt:** Multiplikation des Oberflächenintegrals mit einem konstanten Vektor  $\mathbf{b} \in \mathcal{V}^3$

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}] \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} =: \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a}$$

$$\text{mit } \mathbf{u}(\mathbf{x}) := \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}$$

es folgt mit dem Integralsatz (\*\*)

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}] \, dv$$

Mit Hilfe eines Divergenztheorems ergibt sich speziell für  $\mathbf{b} = \text{konst.}$

$$\operatorname{div} [\mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}] = (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{b}$$

damit folgt

$$\mathbf{b} \cdot \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{b} \, dv$$

so daß

$$\int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x})) \, dv \quad \text{q. e. d.}$$

**Bem.:** Weitere Beweise werden an dieser Stelle nicht geführt.

(d) ZUSAMMENSTELLUNG EINIGER INTEGRALSÄTZE

Es gilt für die Umwandlung von Oberflächen- in Volumenintegrale

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{u} \otimes d\mathbf{a} &= \int_V \text{grad } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \phi \, d\mathbf{a} &= \int_V \text{grad } \phi \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \text{div } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \times d\mathbf{a} &= - \int_V \text{rot } \mathbf{u} \, dv \\ \int_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \text{div } \mathbf{T} \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \times \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{T}) \, dv \\ \int_S \mathbf{u} \otimes \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} &= \int_V \text{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T}) \, dv\end{aligned}$$

Es gilt für die Umwandlung von Linien- in Flächenintegrale

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{u} \otimes d\mathbf{x} &= - \int_S \text{grad } \mathbf{u} \times d\mathbf{a} \\ \oint_L \phi \, d\mathbf{x} &= - \int_S \text{grad } \phi \times d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{u} \times d\mathbf{x} &= \int_S (\mathbf{I} \text{div } \mathbf{u} - \text{grad}^T \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_L \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S (\text{rot } \mathbf{T})^T \cdot d\mathbf{a}\end{aligned}$$

mit  $d\mathbf{a} = \mathbf{n} \, da$

**Bem.:** Weitere Beziehungen der Vektor- und Tensorrechnung werden, sofern dies erforderlich ist, unmittelbar im benötigten Zusammenhang angegeben. Auf eine Darstellung allgemeiner nichtorthogonaler und nichtnormierter Basissysteme wurde generell verzichtet.

## 2.5 Transformationsbeziehungen zwischen aktueller und Referenzkonfiguration

Gegeben sind der Deformationsgradient  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$  und beliebige vektorielle und tensorielle Feldfunktionen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{A}$ . Dann gelten mit

$$\begin{array}{l} \text{Referenzkonfiguration} \\ \text{aktuelle Konfiguration} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Grad}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\cdot) \\ \text{Div}(\cdot) = [\text{Grad}(\cdot)] \cdot \mathbf{I} \quad \text{oder} \quad [\text{Grad}(\cdot)] \mathbf{I} \\ \text{grad}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\cdot) \\ \text{div}(\cdot) = [\text{grad}(\cdot)] \cdot \mathbf{I} \quad \text{oder} \quad [\text{grad}(\cdot)] \mathbf{I} \end{array} \right.$$

die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ll} \text{Grad } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F} & \text{Grad } \mathbf{A} = [(\text{grad } \mathbf{A}) : \mathbf{F}]^{\mathfrak{z}} \\ \text{grad } \mathbf{v} = (\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}^{-1} & \text{grad } \mathbf{A} = [(\text{Grad } \mathbf{A}) : \mathbf{F}^{-1}]^{\mathfrak{z}} \\ \text{Div } \mathbf{v} = (\text{grad } \mathbf{v}) : \mathbf{F}^T & \text{Div } \mathbf{A} = (\text{grad } \mathbf{A}) : \mathbf{F}^T \\ \text{div } \mathbf{v} = (\text{Grad } \mathbf{v}) : \mathbf{F}^{T-1} & \text{div } \mathbf{A} = (\text{Grad } \mathbf{A}) : \mathbf{F}^{T-1} \end{array}$$

Darüber hinaus gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Div } \mathbf{F}^{T-1} = -\mathbf{F}^{T-1} \cdot (\mathbf{F}^{T-1} : \text{Grad } \mathbf{F})^{\perp} & = -(\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^{T-1} \cdot [\text{Grad}(\det \mathbf{F})] \\ \text{div } \mathbf{F}^T = -\mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^T : \text{grad } \mathbf{F}^{-1})^{\perp} & = -(\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^T \cdot [\text{grad}(\det \mathbf{F})^{-1}] \end{array}$$